جنگ ریاضی دانشجو، ۱۳۶۹،۶، ۱۷۲-۱۷۶

هنری هیترلی

یک نوع سرشت‌نمایی برای بعد نامتناهی فضاهای برداری•

ترجمهٔ مهدی مظفری، دانشجوی کارشناسی برق دانشگاه تهران

استدلالهای متفاوت زیادی برای اثبات این مطلب به‌کارگرفته شده‌است که یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی‌هیأت اعداد حقیقی یا مختلط نمی‌تواند یک جفت‌تبدیل خطی با جابجاگر همانی داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر برای چنین فضاهایی غیرممکن است که

$$[A,B]=AB-BA=I$$

قدیمیترین این‌استدلالها تلویحاً درنظریات ماکس بورن[1] وپاکوئل ژوردان[2]، درپژوهشهای بنیادینشان درمورد یک نسخهٔ ماتریسی مکانیک‌کوانتومی آمده‌است [۱]. آنها توجه‌کردندکه برای ماتریسهای متناهی (روی اعداد مختلط)، اگر تابع رد[3] برمعادله

$$PQ-QP=\frac{h}{۲\pi i}I$$

اعمال شود، طرف چپ صفروطرف راست غیرصفرخواهدشد، وازاینجا نتیجه‌گرفتندکه این معادلهٔ اساسی، یعنی"شرط‌کوانتومی دقیق شده"، باید برحسب‌ماتریسهای نامتناهی بوده‌باشد. بعید به‌نظر می‌رسدکه بورن و ژوردان اولین‌کسانی باشندکه به‌چنین استدلالی درمورد رد وجابجاگرها توجه‌کرده‌اند، زیراهرچند دانش آنها دربارهٔ جبرماتریسی ازغالب فیزیکدان‌های آن زمان (۱۹۲۵) بیشتر بوده‌است، هیچکدامشان را نمی‌توان دراین نظریه متخصص

• Heatherly, Henry, "A characterization of infinite dimension for vector spaces," *Mathematics Magazine*, **61** (1988) 239-242.

1. Max Born   2. Pacual Jordan   3. trace

دانست. (برای آگاهی بیشتر از نقش نظریهٔ ماتریسها درفیزیك، درسالهای شکوفایی مکانیك کوانتومی و پیش‌از آن، توصیف عالی[۳] را ببینید.)

استدلال ازطریق تابع رد

فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت K با سرشت‌نمایی صفر باشد. اگر α و β دوتبدیل‌خطی روی V باشند به‌طوری‌که $[\alpha,\beta]=۱$، آنگاه فرض

$$\dim_K V = N < \infty$$

یك جفت ماتریس $n\times n$ روی K، مانند A و B، به‌دست می‌دهدبه‌طوری‌که $[A,B]=I$. چون $(\text{رد } AB)=(\text{رد } BA)$، نتیجه می‌گیریم $\circ=\text{رد}([A,B])=\text{رد}(I)=n\cdot ۱$.

این معادلهٔ آخر بەما الهام می‌کندکه اگــر سرشت‌نمایی هیأت K عددی اول باشد، ممکن است وضعیت تغییر کند، ودرحقیقت این‌گونه نیزهست.

در پیشرفتهای بعدی مکانیك‌کوانتومی، محاسبات‌مربوط به‌ماتریسهای‌کوانتوم‌مکانیکی P و Q برای سیستمهای فیزیکی‌گوناگون (مثل نوسانگر خطی یا اتم هیدروژن) نشان داد که این ماتریسهای نامتناهی نمی‌توانند عملگرهای خطی‌کراندار روی فضای هیلبرت باشند. پیش‌ازآنکه آئورل وینتر[1] در ۱۹۴۷ این مطلب را ثابت‌کند، اثبات‌کلی ودقیقی برای‌آن داده نشده بود [۷]. بــرهان وینتر تخصصی بود و ویژگیهای فنی طیف عملگرها را به‌کار می‌گرفت.کمی بعداز انتشارمقالهٔ وینتر، هلموت ویلانت[2] اثباتی مقدماتی‌ولی‌مجرد برای‌این قضیه، به‌همراه خیلی مطالب دیگر، ارائه داد [۶].

استدلال ویلانت

چارچوب کار دراینجا یك جبر شرکتپذیرخطی نرمداراست [۴]، یعنی یك فضای برداری نرمدار (روی هیأت اعداد حقیقی یا مختلط)، به‌همراه یك ضرب تعریف‌شده روی‌بردارها، به‌طوری که دستگاه حاصل یك حلقهٔ یکدار باشد، و به‌ازای هر دو بردار x و y و هــر اسکالر λ،

$$(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy) \qquad (۱)$$

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\cdot\|y\| \qquad (۲)$$

فرض‌کنیم W چنین جبری باشد. همچنین $a,b\in W$ چنان باشندکه

$$[a,b] = ab - ba = ۱$$

با استقراء روی n می‌توان نشان دادکه

$$a^{n+۱}b - ba^{n+۱} = (n+۱)a^n\,, \qquad n = \circ, ۱, ۲, \cdots$$

1. Aurel Winter 2. Helmut Wielandt

توجه کنید که $a\neq 0$. اگر a پوچ توان باشد، آنگاه کوچکترین m ای هست که $a^m=0$ و $m\geqslant 2$. ازاینجا خواهیم داشت

$$0=a^mb-ba^m=(m-1)a^{m-1} \quad \text{یا} \quad a^{m-1}=0$$

بنابراین، به‌ازای هر n، $a^n\neq 0$ و $\|a^n\|\neq 0$. دراین‌صورت

$$\|(n+1)\,a^n\|=\|a^{n+1}b-ba^{n+1}\|\leqslant\|a^{n+1}\|\cdot\|b\|+\|b\|\cdot\|a^{n+1}\|$$

یا

$$(n+1)\|a^n\|\leqslant 2\|a^n\|\cdot\|a\|\cdot\|b\|$$

پس به‌ازای هر n

$$(n+1)\leqslant 2\|a\|\cdot\|b\|$$

بنابراین یك جبرخطی نرمدار نمی‌تواند شامل یك‌جفت ازچنین عناصری باشد.

تبدیلهای خطی‌کراندار روی یك‌فضای برداری نرمدار یك جبر نرمدار می‌سازند. (از $\|T\|=\sup\|Tx\|$ استفاده کنیدکه درآن $\|x\|<1$ ، [۵، ص ۱۶۲ و ۱۶۳] .) بنابراین معادلهٔ $I=[A,B]$ برای تبدیلهای خطی‌کراندارممکن نیست. ازاینجا قضیهٔ وینتر برای ماتریسهای‌کوانتوم مکانیکی به‌سادگی نتیجه می‌شود.

هرفضای برداری با بعد متناهی روی اعداد حقیقی یا مختلط را می‌توان به‌یك فضای نرمدار مبدل ساخت وهمهٔ تبدیلهای خطی برروی چنین فضایی کراندارند. بنابراین اگر یك فضای برداری (روی اعداد حقیقی یا مختلط) دارای یك جفت تبدیل خطی باشد که در $I=[A,B]$ صدق کنند، آنگاه این فضا الزاماً بعد نامتناهی خواهدداشت.

هریك از دو استدلالی که دربالا ارائه شد، به‌خودی خود جالب توجه است ، اما هرکدامشان از یك نکتهٔ جانبی (رد یا نرم) استفاده می‌کند، درحالی‌که به‌کارگیری هیچ‌یك ازاین دومفهوم لازم نیست.

استدلال ازطریق استقلال خطی

فرض‌کنیم V یك فضای برداری روی هیأتی با سرشت‌نمایی صفر باشد. هرگاه A و B تبدیلهای خطی روی V باشند به‌طوری‌که $I=[A,B]$ ، آنگاه به‌ازای $n=0,1,2,\ldots$ ،

$$A^{n+1}B-BA^{n+1}=(n+1)\,A^n$$

به‌کمك این اتحاد واستقراء ریاضی می‌توان نشان داد که مجموعهٔ I، A، A^2 ، . . . مستقل خطی است. بنابراین بعد فضای همهٔ تبدیلهای خطی روی V متناهی‌نیست و درنتیجه V نیز بعد متناهی نخواهد داشت.

هیچ‌یك از سه استدلال بالا هنگامی‌که سرشت‌نمایی هیأت اسکالرها عددی‌اول‌باشد، برقرار نخواهدبود. درواقع این قضیه دراین حالت درست نیست. اگرسرشت‌نمایی‌هیأت

مورد نظر p و بعد فضا بر p بخشپذیر باشد، آنگاه چنین جفت تبدیلی وجود خواهد داشت [۲].

وجود تبدیلهای مورد نظر روی فضاهای با بعد نامتناهی

یک مثال ملموس نشان می‌دهد که تبدیلهایی خطی با خواص مورد نظر ما واقعاً وجود دارند. این مثال همچنین راهنمای آن است که چگونه می‌توان وجود چنین جفت تبدیلهایی را روی هر فضای با بعد نامتناهی ثابت کرد. فرض کنیم P فضای همهٔ صورتهای چند جمله‌ای روی هیأت K، و D و $x1$ عملگرهایی باشند که این‌چنین تعریف می‌شوند: به‌ازای هر $f(x)\in P$

$$x1\ f(x)=xf(x)\ ,\qquad Df(x)=f'(x)\ ,$$

توجه کنیم که $D.(x1)-(x1).D=1$. نگاهی به اثر D و $x1$ روی پایهٔ 1، x، x^2، ...، چگونگی ساختن یک جفت تبدیل مورد نظر را درحالت کلی به‌ما نشان می‌دهد

$$D1=0\ ,\qquad Dx^n=nx^{n-1}\ ,\qquad n=1,2,\cdots$$

$$x1\ x^n=x^{n+1}\ ,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد نامتناهی باشد. پایه‌ای برای V انتخاب می‌کنیم و آن‌را به‌صورت اجتماع مجزای زیرمجموعه‌های

$$B_j=\{b_{jn}:n=0,1,2,\ \cdots\}$$

می‌نویسیم، که در آن j متعلق به‌یک‌مجموعهٔ اندیس دلخواه است، به‌طوری‌که $\bigcup B_j$ پایه‌ای برای V است. توابع α و β را روی پایه بدین‌شکل تعریف می‌کنیم

$$\alpha b_{j0}=0\ ,\qquad \alpha b_{jn}=nb_{j,n-1}\ ,\qquad n=1,2,\cdots$$

$$\beta b_{jn}=b_{j,n+1}\ ,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

پس به‌ازای هر j, n، $(\alpha\beta-\beta\alpha)b_{jn}=b_{jn}$. α و β را به‌ترتیب به تبدیلهای خطی α' و β' توسعه می‌دهیم، و توجه می‌کنیم که $[\alpha',\beta']=I_V$.

با کنارهم نهادن همهٔ آنچه که گفته‌ایم، خواهیم داشت:

قضیه. فرض‌کنیم V یک فضای برداری روی هیأتی با سرشت‌نمایی صفر باشد. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. بعد V نامتناهی است؛

۲. تبدیلهای خطی A و B ای روی V وجود دارند به طوری‌که $[A,B]=I_V$.

برهان وجود بالا نشان می‌دهد که چگونه می‌توان تعداد زیادی از این جفتها ساخت.

هر گاه $[A,B]=I_V$ ، آنگاه به‌ازای هر تبدیل معکوسپذیر T روی V،

$$[TAT^{-1}\ ,\ TBT^{-1}]=I_V$$

یك مسئلهٔ جالب، رده‌بندی همهٔ جفت‌تبدیلهایی است‌که جابجاگرهمانی دارند. وجود جفت آندومورفیسمهایی روی مدولها با خاصیت $[A,B]=I$، در [۲] مورد بحث واقع شده است. اما مسئله درحالت‌کلی هنوز حل نشده‌است.

مراجع

1. Born,M.,and Jordan, P.,"Zur Quantenmechanik,"*Z. Phys.* **34**(1925), 858-888.
2. Heatherly, H., *Matrices, morphisms, and algebras with [A, B]=1,* to appear.
3. Mehra,J., and Rechenberg,H., *The Historical Development of Quantum Theory,* vol. 3, *The Formulation of Matrix Mechanics and its Modifications 1925-1926,* Springer-Verlag, New York, 1982.
4. Rickart, C., *General Theory of Banach Algebras*, Robert E. Krieger, Huntington, 1974.
5. Taylor, A., *Introduction to Functional Analysis,* John Wiley & Sons, New York, 1963.
6. Wielandt, H., "Über die Unbeschränktheit der Schrödingerschen der Quanten mechanik," *Math. Ann.,* **121** (1949) 21.
7. Winter, A,"The unboundedness of quantum-mechanical matrices," *Phys. Rev,* **71** (1947), 738-739.